专升本高等数学知识点汇总

常用知识点：

一、常见函数的定义域总结如下:

(1) $\begin{array}{l} y = kx + b \\ y = ax^2 + bx + c \end{array}$ 一般形式的定义域: x ∈ R

(2) $y = \dfrac{k}{x}$ 分式形式的定义域:x≠0

(3) $y = \sqrt{x}$ 根式的形式定义域：x≥0

(4) $y = \log_a x$ 对数形式的定义域：x>0

二、函数的性质

1、函数的单调性

当 $x_1 < x_2$ 时，恒有 $f(x_1) < f(x_2)$, $f(x)$ 在 x_1，x_2 所在的区间上是增加的。

当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) > f(x_2)$， $f(x)$ 在 x_1，x_2 所在的区间上是减少的。

2、 函数的奇偶性

定义: 设函数 $y = f(x)$ 的定义区间 D 关于坐标原点对称(即若 $x \in D$, 则有 $-x \in D$)

(1) 偶函数 $f(x)$ —— $\forall x \in D$，恒有 $f(-x) = f(x)$。

(2) 奇函数 $f(x)$ —— $\forall x \in D$，恒有 $f(-x) = -f(x)$。

三、基本初等函数

1、常数函数: $y = c$，定义域是 $(-\infty,+\infty)$，图形是一条平行于 x 轴的直线。

2、幂函数： $y = x^u$， (u 是常数)。它的定义域随着 u 的不同而不同。图形过原点。

3、指数函数

定义：$y = f(x) = a^x$，　（a 是常数且 $a > 0$，$a \neq 1$）. 图形过 $(0, 1)$ 点。

4、对数函数

定义：$y = f(x) = \log_a x$，　（a 是常数且 $a > 0$，$a \neq 1$）。图形过 $(1, 0)$ 点。

5、三角函数

(1) 正弦函数：$y = \sin x$

$T = 2\pi$，$D(f) = (-\infty, +\infty)$，$f(D) = [-1, 1]$。

(2) 余弦函数：$y = \cos x$.

$T = 2\pi$，$D(f) = (-\infty, +\infty)$，$f(D) = [-1, 1]$。

(3) 正切函数：$y = \tan x$.

$T = \pi$，$D(f) = \{x \mid x \in \boldsymbol{R}, x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \boldsymbol{Z}\}$，$f(D) = (-\infty, +\infty)$.

(4) 余切函数：$y = \cot x$.

$T = \pi$，$D(f) = \{x \mid x \in \boldsymbol{R}, x \neq k\pi, k \in \boldsymbol{Z}\}$，$f(D) = (-\infty, +\infty)$.

5、反三角函数

(1) 反正弦函数：$y = \arcsin x$，$D(f) = [-1, 1], f(D) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$。

(2) 反余弦函数：$y = \arccos x$，$D(f) = [-1, 1], f(D) = [0, \pi]$。

(3) 反正切函数：$y = \arctan x$，$D(f) = (-\infty, +\infty)$，$f(D) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$。

(4) 反余切函数：$y = \text{arccot} x$，$D(f) = (-\infty, +\infty)$，$f(D) = (0, \pi)$。

极限

一、求极限的方法

1、代入法

代入法主要是利用了“初等函数在某点的极限，等于该点的函数值。”因此遇到大部分简单题目的时候,可以直接代入进行极限的求解。

2、传统求极限的方法

(1)利用极限的四则运算法则求极限。

(2)利用等价无穷小量代换求极限。

(3)利用两个重要极限求极限。

(4)利用罗比达法则就极限。

二、函数极限的四则运算法则

设 $\lim\limits_{x\to\lambda} u = A$， $\lim\limits_{x\to\lambda} v = B$,则

（1） $\lim\limits_{x\to\lambda}(u \pm v) = \lim\limits_{x\to\lambda} u \pm \lim\limits_{x\to\lambda} v = A \pm B$

(2) $\lim\limits_{x\to\lambda}(u \cdot v) = \lim\limits_{x\to\lambda} u \cdot \lim\limits_{x\to\lambda} v = AB$.

推论

(a) $\lim\limits_{x\to\lambda}(C \cdot v) = C \cdot \lim\limits_{x\to\lambda} v$， （$C$ 为常数)。

(b) $\lim\limits_{x\to\lambda} u^n = (\lim\limits_{x\to\lambda} u)^n$

（3）$\lim\limits_{x\to\lambda} \frac{u}{v} = \frac{\lim\limits_{x\to\lambda} u}{\lim\limits_{x\to\lambda} v} = \frac{A}{B}$，（$B \neq 0$).

(4) 设 $P(x)$ 为多项式 $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$

(5) 设 $P(x), Q(x)$ 均为多项式，且 $Q(x) \neq 0$， 则 $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$

三、等价无穷小

常用的等价无穷小量代换有:

当 $x \to 0$ 时，$\sin x \sim x$，$\tan x \sim x$，$\arctan x \sim x$，$\arcsin x \sim x$，$\ln(1+x) \sim x$，$e^x - 1 \sim x$，

$1 - \cos x \sim \frac{1}{2} x^2$ 。

对这些等价无穷小量的代换,应该更深一层地理解为:

当 $\square \to 0$ 时，$\sin\square \sim \square$ ，其余类似。

四、两个重要极限

重要极限 I $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$。

它可以用下面更直观的结构式表示：$\lim\limits_{\square\to 0} \frac{\sin\square}{\square} = 1$

重要极限ＩＩ　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$。

其结构可以表示为: $\lim\limits_{\square\to\infty}\left(1+\frac{1}{\square}\right)^{\square}=e$

八、洛必达法则

“$\frac{0}{0}$”型和“$\frac{\infty}{\infty}$”型不定式,存在有 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$(或$\infty$)。

一元函数微分学

一、导数的定义

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义,当自变量 x 在 x_0 处取得增量 Δx(点 $x_0+\Delta x$ 仍在该邻域内)时,相应地函数 y 取得增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$。如果当 $\Delta x\to 0$ 时,函数的增量 Δy 与自变量 Δx 的增量之比的极限

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$ 注意两个符号 Δx 和 x_0 在题目中可能换成其他的符号表示。

二、求导公式

1、基本初等函数的导数公式

(1) $(C)'=0$（C 为常数)

(2) $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$($\alpha$ 为任意常数)

(3) $(a^{x})'=a^{x}\ln a\ (a>0,a\neq 1)$　特殊情况 $(e^{x})'=e^{x}$

(4) $(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a}\ (x>0,a>0,a\neq 1)$,　$(\ln x)'=\frac{1}{x}$

(5) $(\sin x)'=\cos x$

(6) $(\cos x)'=-\sin x$

（7）$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

（8）$(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

（9）$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1\langle x\langle 1)$

（10）$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1\langle x\langle 1)$

（11）$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

（12）$(arc\cot x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

2、导数的四则运算公式

（1）$[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$

（2）$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

（3）$[ku]' = ku'$（k 为常数）

（4）$\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]' = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$

3、复合函数求导公式：设 $y = f(u)$，　$u = \varphi(x)$，且 $f(u)$ 及 $\varphi(x)$ 都可导，则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 的导数为 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx} = f'(u).\varphi'(x)$。

三、导数的应用

1、函数的单调性

$f'(x) > 0$ 则 $f(x)$ 在 (a,b) 内严格单调增加。

$f'(x) < 0$ 则 $f(x)$ 在 (a,b) 内严格单调减少。

2 、函数的极值

$f'(x) = 0$ 的点 ——函数 $f(x)$ 的驻点。设为 x_0

(1) 若 $x < x_0$ 时，$f'(x) > 0$；$x > x_0$ 时，$f'(x) < 0$，则 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极大值点。

(2)若 $x < x_0$ 时，$f'(x) < 0$；$x > x_0$ 时，$f'(x) > 0$，则 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极小值点。

(3) 如果 $f'(x)$ 在 x_0 的两侧的符号相同,那么 $f(x_0)$ 不是极值点。

3、曲线的凹凸性

$f''(x) > 0$,则曲线 $y = f(x)$ 在 (a,b) 内是凹的。

$f''(x) < 0$，则曲线 $y = f(x)$ 在 (a,b) 内是凸的。

4、曲线的拐点

(1) 当 $f''(x)$ 在 x_0 的左、右两侧异号时,点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的拐点,此时 $f''(x_0) = 0$.

(2) 当 $f''(x)$ 在 x_0 的左、右两侧同号时,点 $(x_0, f(x_0))$ 不为曲线 $y = f(x)$ 的拐点。

5、函数的最大值与最小值

极值和端点的函数值中最大和最小的就是最大值和最小值。

四、微分公式

$dy = f'(x)dx$，求微分就是求导数。

一元函数积分学

一、不定积分

1、定义,不定积分是求导的逆运算，最后的结果是函数＋C 的表达形式。公式可以用求导公式来记忆。

2、不定积分的性质

(1) $[\int f(x)dx]' = f(x)$ 或 $d\int f(x)dx = f(x)dx$

(2) $\int F'(x)dx = F(x) + C$ 或 $\int dF(x) = F(x) + C$

(3) $\int [f(x) \pm \varphi(x) \pm \cdots \pm \psi(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int \varphi(x) \pm \cdots \pm \int \psi(x)dx$。

(4) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ （k 为常数且 $k \neq 0$）。

2、基本积分公式（要求熟练记忆）

(1) $\int 0dx = C$

（2）$\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C \quad (a \neq -1)$.

（3）$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$.

（4）$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C \quad (a > 0, a \neq 1)$

（5）$\int e^x dx = e^x + C$

（6）$\int \sin x dx = -\cos x + C$

（7）$\int \cos x dx = \sin x + C$

（8）$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$.

(9) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$.

（10）$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$.

（11）$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$.

3、第一类换元积分法

对不定微分 $\int g(x)dx$,将被积表达式 $g(x)dx$ 凑成

$g(x)dx = f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = f\varphi(x)d\varphi(x)$，这是关键的一步。

常用的凑微分的公式有:

（1） $f(ax+b)dx = \frac{1}{a} f(ax+b)d(ax+b)$

(2) $f(ax^k+b) \cdot x^{k-1}dx = \frac{1}{ka} f(ax^k+b)d(ax^k+b)$

(3) $f(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2f\sqrt{x}d\sqrt{x}$

(4) $f(\frac{1}{x}) \cdot \frac{1}{x^2} dx = -f(\frac{1}{x})d\frac{1}{x}$

(5) $f(e^x) \cdot e^x dx = f(e^x)d(e^x)$

(6) $f(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx = f(\ln x)d(\ln x)$

(7) $f(\sin x) \cdot \cos x dx = f(\sin x)d(\sin x)$

(8) $f(\cos x) \cdot \sin x dx = -f(\cos x)d(\cos x)$

(9) $f(\tan x)\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}dx = f(\tan x)d(\tan x)$

(10) $f(\cot x)\cdot\dfrac{1}{\sin^2 x}dx = -f(\cot x)d(\cot x)$

(11) $f(\arcsin x)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = f(\arcsin x)d(\arcsin x)$

(12) $f(\arccos x)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = -f(\arccos x)d(\arccos x)$

(13) $f(\arctan x)\cdot\dfrac{1}{1+x^2}dx = f(\arctan x)d(\arctan x)$

(14) $\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx = d(\ln|\varphi(x)|) \qquad (\varphi(x)\neq 0)$

4、分部积分法

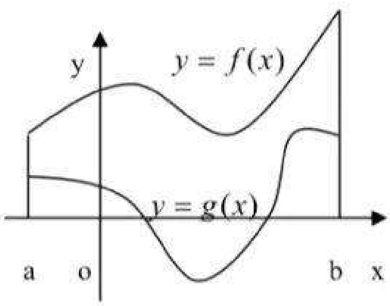
$\int u dv = uv - \int v du$

二、定积分公式

1、(牛顿—莱布尼茨公式) 如果 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的任意一个原函数，则有 $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$。

2、计算平面图形的面积

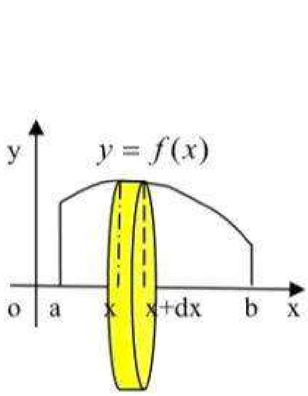
如果某平面图形是由两条连续曲线 $y_1 = g(x), y_2 = f(x)$ 及两条直线 $x_1 = a$ 和 $x_2 = b$ 所围成的（其中 y_1 是下面的曲线，y_2 是上面的曲线），则其面积可由下式求出:



$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$

3、计算旋转体的体积

设某立体是由连续曲线 $y = f(x)(f(x)\geq 0)$ 和直线 $x = a, x = b(a < b)$ 及 x 轴所围平面图形绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体，如图所示。则该旋转体的体积 V 可由下式求出:



多元函数微分学

1、 偏导数，对某个变量求导，把其他变量看做常数。
2、全微分公式：。
3、复合函数的偏导数——利用函数结构图

如果、在点处存在连续的偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}$ ，$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial v}{\partial x}$ ，$\frac{\partial v}{\partial y}$，且在对应于 (x,y) 的点 (u,v) 处，函数 $z=f(u,v)$ 存在连续的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial u}$，$\frac{\partial z}{\partial v}$，则复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 在点 (x,y) 处存在对 x 及 y 的连续偏导数,且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}，\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}。$$

4、隐函数的导数

对于方程 $F(x,y)=0$ 所确定的隐函数 $y=f(x)$，可以由下列公式求出 y 对 x 的导数 $y^{'}$：

$$y^{'}=-\frac{F_x^{'}(x,y)}{F_y^{'}(x,y)},$$

2、隐函数的偏导数

对于由方程 $F(x,y,z)=0$ 所确定的隐函数 $z=f(x,y)$,可用下列公式求偏导数：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x^{'}(x,y,z)}{F_z^{'}(x,y,z)},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y^{'}(x,y,z)}{F_z^{'}(x,y,z)},$$

5、二元函数的极值

设函数 $z=f(x_0,y_0)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有一阶和二阶连续偏导数,且

$f_x^{'}(x_0,y_0)=0$，$f_y^{'}(x_0,y_0)=0$ 又设 $f_{xx}^{''}(x_0,y_0)=A$，$f_{xy}^{''}(x_0,y_0)=B$，$f_{yy}^{''}(x_0,y_0)=C$，则:

(1) 当 $B^2-AC<0$ 时,函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处取得极值,且当 $A<0$ 时有极大值,当 $A>0$ 时有极小值。

（2）当 $B^2-AC>0$ 时，函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处无极值。

（3)当 $B^2-AC=0$ 时,函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处是否有极值不能确定，要用其它方法另作讨论。